Цикл лабораторных работ "Современные методы обработки сигналов"
Проф. Волков Владимир Юрьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБНАРУЖИТЕЛЕЙ СИГНАЛА

Лабораторная работа № 2

по дисциплинам
«Перспективные методы обработки сигналов РТС»
«Моделирование и оптимизация систем связи»

Цель работы: Изучение методов и алгоритмов обнаружения сигнала на шумовом поле с известными и неизвестными характеристиками.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Формулировка задачи обнаружения

В лабораторной работе рассматривается случай обнаружения локального сигнала, занимающего один элемент (пиксел) или группу смежных элементов на изображении. Обычно появление сигнала связано с увеличением интенсивности (яркости) в этих элементах изображения по отношению к случайной яркости фона. Для сигнала, занимающего один элемент, его обнаружение на шумовом фоне может осуществляться путем сравнения каждого значения поля с порогом. Если сигнал занимает группу элементов, то формирование решающей статистики осуществляется в процессе группирования соответствующих элементов изображения.

При известных характеристиках сигнала и шумового поля порог является постоянным и может быть рассчитан заранее исходя из выбранного критерия обнаружения. В данной работе применяется критерий Неймана-Пирсона, который обеспечивает наибольшую вероятность правильного обнаружения при фиксированной вероятности ложной тревоги.

Задача обнаружения формулируется как задача проверки гипотезы H_0: *сигнала нет*, против гипотезы (альтернативы) H_1: *сигнал есть*.

Наблюдения зависят от вида излучения, формы полезного сигнала, типа помехи и вида ее взаимодействия с сигналом, а также от структуры предварительной обработки. Решения d_0 и d_1, принимаемые в пользу H_0 и H_1, зависят как от самих событий (появление сигналов в отдельных элементех), так и от наблюдений и способа обработки, т. е. от вида радиотехнической системы и алгоритма обнаружения.

Пусть y – случайная величина, представляющая наблюдение в данном элементе изображения, либо наблюдение, полученное в результате группирования сигнальных выборок из нескольких элементов изображения. Тогда при гипотезе H_0 случайная величина y имеет плотность вероятности $f_0(y)$, а при альтернативе H_1 – плотность вероятности $f_1(y)$. Оптимальный алгоритм обнаружения основан на формировании *отношения правдоподобия* (решающей статистики) $\Lambda(y) = f_1(y)/f_0(y)$ и сравнении его с порогом Λ_T, т. е. при $\Lambda(y) \geq \Lambda_T$ принимается решение d_1 в пользу гипотезы H_1, а при $\Lambda(y) < \Lambda_T$ – решение d_0 в пользу гипотезы H_0. Если

$\Lambda(y)$ есть монотонная функция y, то оптимальный алгоритм имеет эквивалентный вид $y \ge y_T \Rightarrow H_1$. В других случаях последний алгоритм уже не будет оптимальным.

Значение порога y_T существенно зависит от вида и параметров распределения фона и распределения сигнала в анализируемых элементах изображения. При полном статистическом описании моделей сигнала и фона это значение может быть рассчитано заранее. Это значение зависит от выбранного критерия оптимальности. Для критерия Неймана-Пирсона порог y_{NP} рассчитывается исходя из заданной вероятности ложной тревоги.

Качество обнаружения зависит от степени различия плотностей $f_0(y)$ и $f_1(y)$. Это различие обычно растет с увеличением интенсивности полезного сигнала и проявляется, в частности, в сдвиге $f_1(y)$ по отношению к $f_0(y)$. Степень различия плотностей $f_0(y)$ и $f_1(y)$ влияет на *степень обнаружимости* полезного сигнала и ее можно характеризовать *параметром обнаружения* $d = (M_1(y) - M_0(y))/\sigma_0(y)$, где $M_1(y)$ и $M_0(y)$ обозначают математические ожидания случайной величины (СВ) y при гипотезах H_1 и H_0, $\sigma_0(y)$ – среднеквадратическое отклонение (СКО) СВ y при гипотезе H_0. Параметр d называется *дефлекцией* и обычно имеет физический смысл *отношения сигнал/шум по напряжению* на входе порогового устройства.

Другим *параметром обнаружения*, характеризующим степень обнаружимости, является величина $q^2 = (P_1 - P_0)/P_0$, где $P_1 = M_1(y^2)$, $P_0 = M_0(y^2)$ - вторые моменты распределений $f_1(y)$ и $f_0(y)$, т. е. *мощности* случайной величины y при соответствующих гипотезах. Величина q^2 имеет смысл *отношения сигнал/шум по мощности* на входе порогового устройства.

Качество алгоритма обнаружения при заданном различии плотностей $f_0(y)$ и $f_1(y)$ (т. е. при заданном отношении сигнал/шум в какой-либо форме) полностью характеризуется двумя условными вероятностями: *вероятностью ложной тревоги* $F = P(d_1 \mid H_0)$ и *вероятностью правильного обнаружения* $D = P(d_1 \mid H_1)$. Вместо вероятности правильного обнаружения можно использовать вероятность пропуска $M = 1 - D = P(d_0 \mid H_1)$.

Зависимость D от F при фиксированном параметре обнаружения (или фиксированном отношении сигнал/шум) есть *рабочая характеристика приемника* (РХП). Зависимость D от параметра обнаружения при фиксированной вероятности ложной тревоги представляет *характеристику обнаружения* алгоритма или *кривую обнаружения*. Семейства этих кривых связаны с семействами РХП, но при использовании критерия Неймана-Пирсона удобнее пользоваться характеристиками обнаружения.

Для байесовских критериев *идеального наблюдателя* и *максимального правдоподобия* качество обнаружения описывается вероятностями *полной ошибки* $P_e = p_0 F + (1 - p_0)(1 - D)$ и *суммарной ошибки* $P_\Sigma = F + 1 - D$ соответственно. Здесь p_0 есть *априорная* вероятность отсутствия сигнала. Для описания качества алгоритмов используются зависимости P_e или P_Σ от параметра обнаружения.

1.2 Обнаружители с постоянным порогом в случае модельных распределений фона

При полностью известной плотности $f_0(y)$ вычисление порога y_{NP} по критерию Неймана-Пирсона сводится к решению уравнения $F_0 = \int_{y_{NP}}^{\infty} f(y)dy$, где F_0 – заданное значение вероятности ложной тревоги. Фактически требуется определить процентную точку выбранного распределения. Для большинства модельных распределений решение получается в аналитическом виде.

1.3 Расчет постоянного порога y_{NP}

В случае *равномерного распределения* $U(0,b)$ пороговое значение равно $y_{NP} = b(1-F_0)$. Для *гауссовского распределения* $f_0(y) = N(m_0, \sigma_0^2)$ порог равен $y_{NP} = m_0 + \sigma_0 c_F$, где c_F есть $100 \cdot F_0$ – процентная точка *стандартного* нормального распределения $N(0,1)$. Значение c_F выбирается по таблицам интеграла вероятности исходя из заданного значения F_0. Связь значений c_F и $a = -\lg F_0$ дается таблицей 1:

Таблица 1

a	2	3	4	5	6
c_F	2,323	3,09	3,72	4,27	4,76

Шум с *экспоненциальным* распределением образуется на выходе квадратичного детектора огибающей при воздействии на его вход гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием. Шум с *релеевским* распределением получается на выходе линейного детектора огибающей.

В случае шума с экспоненциальным распределением $E(\beta_0)$ решение получается в виде $y_{NP} = a \cdot \beta_0 /(\lg e) \approx a \cdot \beta_0 / 0{,}4343$. Для релеевского распределения $R(\beta_0)$ порог равен $y_{NP} = \beta_0 \cdot \sqrt{a/(\lg e)} \approx 1{,}517 \beta_0 \sqrt{a}$.

Вообще для шума с распределением из *семейства Вейбулла* $WB(\beta, \gamma)$ значение $y_{NP} = \beta_0 \cdot (a/(\lg e))^{1/\gamma}$.

В случае шума с *логарифмическим нормальным* распределением $LN(y_{med}, k_v)$ порог равен $y_{NP} = y_{med} \exp(c_F \cdot \sigma_l)$.

Для шума с *гамма-распределением* $\Gamma(\alpha, \beta)$ порог выражается через процентную точку c_F стандартного гамма-распределения $\Gamma(\alpha, 1)$. Последняя связана с *неполной гамма-функцией* $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) \mathrm{d}t$, а именно $\Gamma(\alpha, c_F) = F_0$. Порог по критерию Неймана-Пирсона будет равен $y_{NP} = \beta \cdot c_F$.

При больших аргументах $x >> 1$ имеется асимптотическое разложение $\Gamma(\alpha, x) \sim x^{\alpha-1} e^{-x} \cdot [1 + (\alpha-1)/x + (\alpha-1)(\alpha-2)/x^2 + \ldots]$.

Для целых n справедливо выражение $\Gamma(n+1, x) = \int_x^\infty t^n \exp(-t) \mathrm{d}t = n! \exp(-x) \cdot \sum_{i=0}^n x^i / i!$. Известно, что гамма-распределение есть непрерывный аналог *распределения хи-квадрат*, причем число степеней свободы N последнего распределения связано с параметром формы гамма-распределения $\Gamma(\alpha, \beta = 2)$, а именно $\alpha = N/2$. Процентные точки распределения χ_N^2 с N степенями свободы приведены в таблице 2.

Процентные точки гамма-распределения $\Gamma(\alpha = N/2, \beta = 1)$ будут вдвое меньшими. Для определения процентной точки при другом параметре масштаба β следует взять значение из таблицы, разделить на два и умножить на β.

Таблица 2

N	$F = 10^{-2}$	$F = 10^{-3}$	$F = 10^{-4}$	$F = 10^{-5}$	$F = 10^{-6}$
1	6,635	10,828	15,137	19,511	23,928
2	9,21	13,816	18,421	23,026	27,631
5	15,086	20,515	25,745	30,856	35,888
10	23,209	29,588	35,564	41,296	46,863
20	37,566	45,315	52,386	59,045	65,421
30	50,892	59,703	67,633	75,023	82,044
50	76,154	86,661	95,969	104,542	112,608
100	135,807	149,449	161,319	172,099	182,127

В случае шума с m - *распределением Накагами* $mN(\alpha, \beta)$ также можно пользоваться указанной таблицей для $\alpha = N/2$. Распределение Накагами может быть получено из гамма-распределения путем функционального преобразования, которое сводится к извлечению квадратного корня. Для определения процентной точки, т. е. порога y_{NP}, берется значение из таблицы для заданных F и $\alpha = N/2$, делится пополам, извлекается квадратный корень, и результат умножается на параметр масштаба распределения Накагами.

Для шума с K - *распределением* $K(\alpha, \beta)$ порог можно вычислить приближенно. Вероятность превышения порога равна $F_0 = P(y \ge y_{NP}) = 2(y_{NP}/\beta)K_\alpha(2\sqrt{y_{NP}/\beta})$, где $K_\alpha(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода. При больших аргументах $z >> 1$ она вычисляется приближенно по формуле $K_\alpha(z) = \sqrt{\pi/2z} \cdot [1 + (4\alpha^2 - 1)/8z]$. Порог y_{NP} определяется из полученного приближенного уравнения.

1.4 Расчет характеристик обнаружения

Вычисление вероятности правильного обнаружения для обнаружителя с постоянным порогом связано с нахождением интеграла от плотности $f_1(y)$. В качестве параметра обнаружения будут использоваться две величины: дефлекция d и отношение сигнал/шум по мощности q^2.

Рассмотрим некоторые стандартные задачи обнаружения.

1. $N(m_0, \sigma_0^2) - N(m_1, \sigma_0^2)$ (Сдвиг гауссовского распределения).

В этом случае появление полезного сигнала приводит к сдвигу гауссовской плотности. Если $m_1 > m_0$, то вероятность правильного обнаружения равна $D = \Phi(d - c_F)$, где $d = (m_1 - m_0)/\sigma_0$, а $\Phi(z) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{z}\exp(-x^2/2)\mathrm{d}x$ есть интеграл вероятности форме Лапласа. Имеется приближенная граница: $D > 1 - (1/2)\exp(-(d - c_F)^2/2)$, которую можно использовать при $d - c_F > 2$.

Нетрудно видеть, что *пороговые значения дефлекции*, обеспечивающие заданные D и F, равны $d_{(D,F)} = c_{1-D} + c_F$. В частности, для ВЛТ $F = 10^{-2}$ имеем $d_{(0,5)} = c_F = 2{,}326$ для $D = 0{,}5$ и $d_{(0,9)} = 3{,}78$ для $D = 0{,}9$.

Для отношения сигнал/шум по мощности имеем $q^2 = (P_1 - P_0)/P_0 = d(d + 2\gamma_0)/(1+\gamma_0^2)$, где $\gamma_0 = m_0/\sigma_0$. При $\gamma_0 = 0$ получаем $q^2 = (P_1 - P_0)/P_0 = d^2$.

2. $E(\beta_0) - E(\beta_1)$ (Изменение масштаба экспоненциального распределения).

Если при появлении полезного сигнала параметр масштаба увеличивается, т. е. $\beta_1 > \beta_0$, то можно ввести отношение сигнал/шум по напряжению (дефлекцию) $d = (\beta_1 - \beta_0)/\beta_0$, и получить рабочие характеристики и характеристики обнаружения в аналитическом виде $D = F^{1/(1+d)}$. Вводя обозначения $a = -\lg F$ и $b = -\lg D$, получаем $b = a/(1+d)$. Таким образом, РХП в координатах a и b получаются в виде прямых линий.

Для фиксированных значений F и D можно вычислить пороговую дефлекцию $d_{(D,F)} = a/b - 1 \approx a/b$.

Введем отношение $\mu = a/b$, которое обычно значительно больше единицы в интересующих нас областях характеристик обнаружения. Оно характеризует требование к качеству обнаружения. В результате имеем $d_{(D,F)} \approx \mu$.

Переходя к отношению сигнал/шум по мощности, получаем $q^2 = d(d+2)$. Для порогового отношения сигнал/шум по мощности имеем $q^2_{(D,F)} = a^2/b^2 - 1 \approx \mu^2$.

3. $R(\beta_0) - R(\beta_1)$ (Изменение масштаба релеевского распределения)

Считаем, что при появлении полезного сигнала параметр масштаба увеличивается. Тогда РХП имеют тот же вид, что и в предыдущей задаче с заменой параметра d на q^2. В результате получаем $q^2_{(D,F)} = a/b - 1 \approx \mu$. Сравнивая с предыдущей задачей, можно убедиться, что в данном случае значения порогового отношения сигнал/шум по мощности будут существенно меньшими.

4. $LN(y_{med}, k_v) - E(\beta_1)$ (Шум – логарифмический нормальный, появление полезного сигнала приводит к изменению плотности, которая становится экспоненциальной).

Мощность шума (второй статистический момент) $P_0 = m_0^2 + \sigma_0^2 = y_{med}^2 \cdot \rho^4$, где $\rho = \exp(\sigma_l^2/2)$ есть отношение математического ожидания к медиане. При появлении полезного сигнала мощность равна $P_1 = 2\beta_1^2$.

В данной задаче удобно использовать отношение сигнал/шум по мощности. Поскольку $P_1 = P_0(1+q^2) = 2\beta_1^2$, получаем $\beta_1^2 = y_{med}^2 \rho^4 (1+q^2)/2$.

Поскольку вероятность правильного обнаружения $D = \exp(-y_{NP}/\beta_1)$, то после подстановки β_1 получаем характеристики обнаружения $D = \exp(-\sqrt{2}\exp(c_F \sigma_l)/\rho^2(1+q^2)^{1/2})$. Обозначив нормированный к медиане шума порог $\nu = y_{NP}/y_{med}$, получаем, что значение $\nu = \exp(c_F \sigma_l)$ зависит от требуемой вероятности ложной тревоги и величины $\rho = \exp(\sigma_l^2/2)$.

Тогда пороговое отношение сигнал/шум по мощности $q^2_{(D,F)} = 2\nu^2 (\lg e)^2 / b^2 \rho^4 - 1 = \kappa\mu^2 - 1 \approx \kappa\mu^2$, где коэффициент $\kappa = 2\nu^2 (\lg e)^2 / \rho^4 a^2$ зависит от значения параметра шума σ_l, а также от значения вероятности ложной тревоги F.

Расчеты показывают, что значение κ больше единицы, поэтому пороговое отношение сигнал/шум по мощности в случае логарифмического нормального шума превышает аналогичное отношение сигнал/шум по мощности для экспоненциального шума. Таким образом, коэффициент κ отражает потери в пороговом отношении сигнал/шум по отношению к задаче $E(\beta_0) - E(\beta_1)$.

5. $LN(y_{med}, k_v) - R(\beta_1)$ (Шум - логарифмический нормальный, появление полезного сигнала приводит к изменению плотности, которая становится релеевской).

Аналогично предыдущей задаче получаем РХП $D = \exp(-\sqrt{2}\exp(c_F \sigma_l) / \rho^4 (1 + q^2)\ )$. Пороговое отношение сигнал/шум по мощности $q^2_{(D,F)} = \nu^2 (\lg e) / b\rho^4 - 1 = \kappa\mu - 1 \approx \kappa\mu$. В данном случае коэффициент $\kappa = \nu^2 (\lg e) / \rho^4 a$ отражает потери в пороговом отношении сигнал/шум по мощности по сравнению со случаем релеевского шума, т. е. по сравнению с задачей $R(\beta_0) - R(\beta_1)$.

6. $WB(\gamma_0, \beta_0) - R(\beta_1)$ (Шум имеет распределение Вейбулла с некоторыми параметрами, а при появлении сигнала распределение изменяется на релеевское).

В этом случае удобно ввести отношение сигнал/шум по мощности, которое определяет связь параметров γ_0, β_0 и β_1: $\beta = \beta_0^2 (1 + q^2) \cdot \Gamma(1 + 2/\gamma)$. Пороговое отношение сигнал/шум определяется по формуле $q^2_{(D,F)} = \xi^2 (\lg e) / b \cdot \Gamma(1 + 2/\gamma)) - 1 = \lambda\mu - 1 \approx \lambda\mu$, где нормированный порог $\xi = y_{NP} / \beta_0 = (a / \lg e)^{1/\gamma}$, а коэффициент $\lambda = \xi^2 (\lg e) / (a \cdot \Gamma(1 + 2/\gamma))$ отражает потери (или выигрыш) а пороговом отношении сигнал/шум по мощности по отношению к задаче $R(\beta_0) - R(\beta_1)$.

1.5 Обнаружители с адаптивным порогом при неизвестных параметрах фона

В случае неизвестных характеристик шумового поля возникают трудности в установке порога обнаружения. Незнание характеристик фона и их возможные изменения приводят к тому, что необходимо формировать *адаптивный* (переменный) порог обнаружения. Для этого обычно используются опорные шумовые выборки с соседних элементов изображения.

Общий алгоритм обнаружения включает три основные процедуры:

1) группирование *анализируемых* (сигнальных) и *опорных* (помеховых) каналов,
2) формирование порогов для анализируемых элементов,
3) сравнение и принятие решения.

Процедура группирования связана с выбором формы и размеров скользящих окон для одновременной обработки сигналов, определением числа анализируемых и опорных элементов в пределах выбранных окон, организацией порядка считывания всего изображения при его обработке в процессе обнаружения.

При последовательном считывании изображения организуется скользящее окно, включающее $n + m$ элементов. При этом полагается, что сигнал может одновременно появиться в m элементах, а остальные n элементов заняты шумовым полем. В процессе считывания каждый из элементов в тот или иной момент оказывается в группе анализируемых.

В лабораторной работе предлагается набор нескольких квадратных сигнальных окон: и ряда помеховых окон. Сигнальное окно располагается в центре помехового. Считывание изображения осуществляется в процессе перемещения *скользящего* помехового окна (внутри которого находится сигнальное) слева направо вдоль каждой строки с последовательным просмотром строк сверху вниз.

Опорные шумовые выборки используются для оценивания неизвестных параметров шума в анализируемых элементах изображения.

Обычно выбор формы и размеров окна учитывает свойства *пространственной однородности* или *изотропности* шумового поля. Для полностью однородного и изотропного шумового поля помеховое окно должно включать все имеющиеся шумовые выборки.

Пусть сигнальное окно содержит m выборок $y=(y_1,y_2,...,y_m)$, а помеховое – n выборок $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Обнаружение полезного сигнала производится путем сравнения решающей статистики $u(y)=u(y_1,y_2,...,y_m)$ (результат формирования сигнала) с порогом $h(y,x)$: $u(y)\geq h(y,x)\Rightarrow H_1$ - сигнал есть.

В общем случае *адаптивный порог* $h(y,x)$ зависит от всех значений анализируемых и помеховых выборок. Если сигнальное окно содержит только один элемент, т. е. $m=1$, то алгоритм обнаружения принимает вид $y\geq h(y,x)\Rightarrow H_1$.

Математический синтез оптимального алгоритма обнаружения сигнала по выборкам $y=(y_1,y_2,...,y_m)$ и $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ возможен при существовании статистического описания классов W_0 и W_1 для совместных распределений $f_0(y)$ и $f_1(y)$ при гипотезах H_1 (сигнал есть) и H_0 (сигнала нет). Задача облегчается в случае взаимной независимости выборочных значений помехи между собой и с анализируемой выборкой, а также однородности помехи (одинаковости распределений) в опорных и анализируемых каналах.

Критерий Неймана-Пирсона предусматривает синтез алгоритма, обеспечивающего максимальную вероятность правильного обнаружения D при ограничении вероятности ложной тревоги F на уровне F_0, т. е. $F\leq F_0$.

В *параметрической* постановке задачи обнаружения классы распределений W_0 и W_1 задаются с помощью аналитического (параметрического) описания плотностей вероятности независимых выборок $f_0(y\,|\,\theta_0)$, $f_0(x\,|\,\theta_0)$ и $f_1(y\,|\,\theta_1)$, где θ_0 и θ_1 неизвестные параметры, входящие в выражения для плотностей.

В простейших моделях число компонент, входящих в θ_0 и θ_1, т. е. число неизвестных параметров, невелико (один-два), что существенно уменьшает трудности синтеза и анализа получающихся алгоритмов. В случае одного полезного (связанного с появлением сигнала) и нескольких мешающих параметра решение задачи упрощается, если существуют достаточные статистики $u(y)$ и $v_1(y,x)$, $v_2(y,x)$, …, $v_k(y,x)$ для этих параметров.

Оптимальный алгоритм в классе *несмещенных* (у которых вероятность правильного обнаружения не меньше вероятности ложной тревоги) имеет так называемую структуру Неймана $u\geq h(u,v_1,v_2,...v_k)\Rightarrow H_1$, где пороговая функция $h(u,v_1,v_2,...v_k)$ находится из уравнения: $\int_h^\infty w_0(u\,|\,v)du=F_0$, включающего условную плотность вероятности $w_0(u\,|\,v)$ для решающей статистики u при фиксированном значении v. Данный алгоритм обладает ценным свойством стабилизации вероятности ложной тревоги на уровне F_0 при изменениях мешающих параметров (параметров распределения помехи) – свойством *подобия*.

Алгоритмы оценивания параметров шума и формирования адаптивного порога существенно зависят от вида распределения шума. В данной работе рассматривается шум с экспоненциальным распределением, который имеет единственный параметр масштаба. Этот параметр является *существенным*, поскольку он входит в выражение для вычисления постоянного порога обнаружения. Он также весьма сильно влияет на характеристики обнаружения, т. е. является *значимым*.

Для экспоненциальных распределений $f_0(y\,|\,\theta_0) = E(\beta_0)$, $f_0(x\,|\,\theta_0) = E(\beta_0)$ и $f_1(y\,|\,\theta_1) = E(\beta_1)$, с неизвестными параметрами масштаба в результате синтеза *равномерно наиболее мощного* (РНМ) *несмещенного* алгоритма получается так называемый "Cell-Averaging Detector" (*"CA-Detector"* – обнаружитель с усреднением по ячейкам): $u \ge c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow H_1$, где c_1 – положительная постоянная, зависящая от числа помеховых выборок n.

Пороговая функция в данном случае пропорциональна выборочному среднему $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$ с коэффициентом пропорциональности $k_1 = c_1 \cdot n$, который обеспечивает заданную вероятность ложной тревоги F_0. Решающая статистика u формируется как выборочное среднее анализируемых выборок $u = \sum_{i=1}^{m} y_i / m$.

Приведем выражения для характеристик обнаружения этого адаптивного алгоритма. При независимых одинаково распределенных выборках помехи вероятность ложной тревоги не зависит от параметра масштаба распределения и равна $F = (1 + c_1)^{-n}$. Отсюда $a = -\lg F = -n \cdot \lg(1 + c_1)$, а пороговый коэффициент равен $c_1 = 10^{a/n} - 1$.

Значение вероятности ложной тревоги будет отличаться от расчетного в случае неоднородной помехи (изменения параметра масштаба в пределах окна), а также при зависимых выборках помехи.

Алгоритм *"CA-Detector"* можно представить в виде $u \ge k_1 \cdot \bar{x} \Rightarrow H_1$, где $k_1 = c_1 \cdot n$. Заметим, что $\bar{x}$ есть наилучшая оценка неизвестного параметра масштаба β_0 экспоненциального распределения помехи.

В случае известного параметра β_0 оптимальный порог равен $k_0 \cdot \beta_0$, где $k_0 = a / \lg e$. Сравнение значений k_0 и k_1, соответствующих одинаковым вероятностям ложной тревоги показывает, что k_1 всегда больше k_0. Это объясняется флуктуациями выборочного среднего $\bar{x}$, что требует увеличения порога.

При появлении полезного сигнала параметр масштаба увеличивается $\beta_1 = \beta_0(1 + d)$, где d – дефлекция или отношение сигнал/шум по напряжению, является одновременно относительным изменением параметра масштаба. Если рассматривать увеличение мощности $P_1 > P_0$, где $P_0 = 2\beta_0^2$, $P_1 = 2\beta_1^2$, то отношение сигнал/шум по мощности равно $q^2 = (P_1 - P_0) / P_0 = (\beta_1^2 - \beta_0^2) / \beta_0^2$, причем $q^2 = d(d + 2)$.

При неизвестном параметре масштаба помехи и использовании *"CA-Detector"* в случае единственной анализируемой выборки (т. е. сигнальное окно содержит один элемент $m = 1$) характеристики обнаружения определяются выражением $D = (1 + d)^n / (10^{a/n} + d)^n$. Пороговая дефлекция равна $d_{(D,F)} = (10^{a/n} - 10^{b/n}) / (10^{b/n} - 1)$ и зависит от числа опорных выборок помехи.

В *непараметрической* постановке задача синтеза может формулироваться как проверка идентичности распределений всех (независимых) выборок:

H_0 : $w_0(y_i) = w_1(y_j)$ для любых значений i, j.

H_1 : $w_0(y_i) > w_1(y_j)$ хотя бы для одной пары i и j.

Последняя строчка означает, что выборка y «статистически больше» выборки x.

В этом случае процедура обнаружения основывается на использовании знаковых и ранговых статистик, получаемых из вариационного ряда $x^{(1)} \le x^{(2)} \le ... \le x^{(n)}$. Например, $x_{\max} = x^{(n)}$ есть максимальное значение, а выборочная медиана $x_{\mathrm{med}} = med(x_1,...,x_n)$ вычисляется по формулам: $x_{\mathrm{med}} = (x^{(k)} + x^{(k+1)})/2$ при $n = 2k$, $x_{\mathrm{med}} = x^{(k+1)}$ при $n = 2k+1$.

Непараметрические статистики обладают достаточной устойчивостью характеристик при изменениях вида распределения независимых опорных выборок, что обеспечивает стабильный уровень вероятности ложной тревоги для алгоритма *"Max-Detector"* $u > x_{\max} \Rightarrow H_1$, а также для алгоритма *"Med-Detector"* $u > x_{\mathrm{med}} \Rightarrow H_1$. Однако они представляют практический интерес при большом количестве независимых опорных выборок n, поскольку значения вероятности ложной тревоги имеют порядок $(1/n)$. В частности, для алгоритма *"Max-Detector"* (выбор наибольшего значения для порога) вероятность ложной тревоги равна $F = 1/(1+n)$ при любых распределениях независимых выборок помехи.

При не очень больших n (например, несколько десятков) используются *квазинепараметрический* вариант алгоритма *"Max-Detector"* $u > c_2 \cdot x_{\max} \Rightarrow H_1$, который позволяет получать требуемые низкие значения вероятности ложной тревоги, за счет выбора постоянной $c_2 > 1$. Эти значения остаются стабильными в классе распределений помехи с единственным неизвестным параметром масштаба. Изменения вида распределения требуют изменения значения порогового коэффициента c_2, который зависит также от числа выборок n. Тем не менее, последний алгоритм более устойчив к отклонениям от принятой модели распределения помехи, чем алгоритм *"CA Detector"*.

Для экспоненциальных моделей вероятность правильного обнаружения, соответствующая алгоритму *"Max-Detector"* при $n = 1$ вычисляется по формуле $D = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (1 + k(d+1)/c_2)^{-1}$, где $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$ – число сочетаний из n по k.

Вероятность ложной тревоги получается из этого выражения при $d = 0$. Легко убедиться, что при выборе пороговой константы $c_2 = 1$ алгоритм *"Max-Detector"* становится чисто непараметрическим и обеспечивает постоянную для любых распределений шума вероятность ложной тревоги $F = (1+n)^{-1}$.

2. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБНАРУЖИТЕЛЕЙ

2.1 Состав программного обеспечения

Программное обеспечение включает четыре блока программ, объединенных единой оболочкой:

1. *Модель* – формирование (генерирование) случайных полей с заданными распределениями.
2. *Сигнал* – формирование полезных сигналов в заданных областях поля.
3. *Оценка* – Оценивание характеристик поля: формирование выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса.
4. *Обработка* – обнаружение сигналов на фоне шумового поля.

Переход к тому или иному блоку программ осуществляется выбором соответствующего режима в главном меню (верхняя строка):

2.2 Структура и описание программ в режиме «Сигнал»

Программное обеспечение позволяет моделировать появление полезного сигнала в виде точки на фоне помехи либо локальную неоднородность помехи в каждом элементе изображения. При этом положение элемента задается как номер столбца и строки (X, Y). Размер неоднородности квадратной формы можно изменить.

Имеется возможность задания непосредственно абсолютного значения смеси сигнала с помехой в указанной точке (Значение).

Формирование случайной величины сигнала на фоне помехи зависит от вида распределения помехи и связано с заданием значений дефлекции или отношения сигнал/шум по мощности, которое определяется в каждом конкретном случае.

2.3 Структура и описание программ в режиме «Порог»

В программе осуществляется формирование постоянного и адаптивного порогов для каждого элемента анализируемого изображения. Постоянный уровень вводится непосредственно. Формирование адаптивного порога включает выбор вида скользящего окна. В программе предусмотрено шесть вариантов помеховых окон и два варианта сигнального окна.

Для повышения устойчивости характеристик алгоритмов и исключения влияния аномальных выбросов шума введено предварительное *цензурирование* опорных выборок путем исключения одного максимального значения из общего числа помеховых выборок в скользящем окне.

Таким образом, число n опорных выборок помехи, участвующих в формировании адаптивного порога, будет на единицу меньше общего числа опорных выборок в помеховом окне.

Для формирования адаптивного порога применена линейная гибридная структура, использующая базовые алгоритмы *"CA Detector"* и *"Max-Detector"*: $u \geq c_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + c_2 \cdot x_{\max} \Rightarrow H_1$.

Коэффициенты c_1 и c_2 вводятся по запросу в диалоговом режиме с клавиатуры.

Для частных базовых алгоритмов *"CA Detector"* и *"Max-Detector"* (т.е. для случаев $c_2 = 0$ либо $c_1 = 0$) значения пороговых коэффициентов рассчитываются для экспоненциального распределения помехи и выводятся в диалоговом окне.

Результат пороговой обработки отображается в правом окне в виде светлых точек. Относительное количество превышений (по отношению к общему числу точек поля 256*256) выводится в графе "Ложных выбросов".

3. ЗАДАЧИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

3.1 Состав программного обеспечения

3.1. Теоретическое исследование связи постоянных порогов обнаружения, а также пороговых постоянных для адаптивных порогов с параметрами помеховых распределений. Теоретический анализ влияния вида распределения шума на значения порогов и на пороговые отношения сигнал/шум.

3.2. Генерирование случайного поля с заданными параметрами распределения. Пороговая обработка с использованием постоянных порогов с целью выяснения соответствия экспериментального числа превышений и теоретического значения вероятности ложной тревоги.

3.3. Экспериментальное изучение возможностей алгоритмов обнаружения с постоянным и адаптивным порогами. Исследование чувствительности алгоритмов к отклонениям от заданной модели. Получение экспериментальных характеристик обнаружения и сравнение их с теоретическими.

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

4.1. Изучить теоретические сведения и ответить на контрольные вопросы.

4.2. Выбрать модель шумового поля и решить задачи пункта 3.1. Рассчитать значения постоянных порогов для выбранного типа шумового поля, обеспечивающие заданную вероятность ложной тревоги.

4.3. Провести экспериментальное исследование в соответствии с пунктом 3.2. Исследовать чувствительность алгоритма с постоянным порогом (по относительному числу ложных тревог) к изменениям модели случайного поля.

4.4. Ввести сигнал в шумовое поле и выполнить обнаружение его алгоритмом с постоянным порогом. Сравнить с теоретическими значениями характеристик. Исследовать влияние флуктуаций сигнала на качество обнаружения.

4.5. Выполнить обнаружение сигнала алгоритмом с адаптивным порогом. Исследовать влияние флуктуаций сигнала и размеров помехового окна на качество обнаружения.

4.6. Подписать протокол исследований (черновик).

4.7. Оформить и представить отчет по лабораторной работе согласно приведенным ниже требованиям.

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

5.1. Отчет по лабораторной работе оформляется индивидуально каждым студентом.

5.2. Титульный лист должен содержать название лабораторной работы, Фамилию, имя, отчество (полностью) и номер группы студента, дату выполнения работы и дату представления к защите.

5.3. Отчет должен содержать следующие обязательные части:

1. Цель работы.

2. Постановку задачи (в развернутом виде с указанием частных задач).
3. Теоретические исследования.
4. Экспериментальные исследования по каждой конкретной задаче.
5. Выводы по каждому пункту исследований и общие выводы из сравнения результатов теории и эксперимента.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Выделить из текста и дать определения всем терминам: отношение правдоподобия, оптимальность, степень обнаружимости, отношение сигнал/шум, пороговое отношение сигнал/шум, решающая статистика, вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения, рабочие характеристики приемника, характеристики обнаружения, адаптивный порог, несмещенный алгоритм и др.

2. Дать формулировку задачи обнаружения с указанием ее основных элементов.

3. Проверить приведенные выше выражения для постоянных порогов обнаружения и пороговых отношений сигнал/шум в случае основных модельных распределений шума.

4. В чем отличие формулировок параметрической и непараметрической задач обнаружения?

5. Выделите существенные и значимые параметры для каждой из модельных задач обнаружения.

6. Является ли алгоритм *"CA-Detector"* оптимальным и в каком смысле?

7. Как и почему изменяются характеристики адаптивных алгоритмов с увеличением размеров помехового окна?

8. В каких случаях адаптивные алгоритмы обеспечивают выигрыш в характеристиках обнаружения по отношению к алгоритмам с постоянным порогом?

9. Выделите достоинства и недостатки двух рассмотренных вариантов адаптивных обнаружителей.

10.С какой целью применяется цензурирование выборок в помеховом окне?

7. ЛИТЕРАТУРА

1. Волков В.Ю. Обнаружение и различение сигналов в радиотехнических системах: Учебное пособие/ СПбГУТ. – СПб, 2000.
2. Волков В. Ю. Адаптивные, инвариантные и робастные методы обнаружения и различения сигналов: Учебное пособие. ч. 1. СПб ГУТ. – СПб, 2005.
3. Волков В. Ю. Адаптивные, инвариантные и робастные методы обнаружения и различения сигналов: Учебное пособие. ч. 2. СПбГУТ. – СПб, 2008.